

7.10.

Prímula: limity typu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)}$

$p, q = \text{polynom}$

Príklad 1: n čitateľ: i jmenovateľ:

vytlačíme najvyššiu mocninu n ,
vykrátíme, dopočítame

Nastávajú 3 možnosti:

- $\text{st. } p < \text{st. } q \Rightarrow \lim = 0$
- $\text{st. } p > \text{st. } q \Rightarrow \lim = \pm \infty$
(dľa znaménok vednúcich koef.)
- $\text{st. } p = \text{st. } q \Rightarrow \lim = \frac{a}{b}$,
kde $a, b = \text{vedúce koef.}$
polynome p, q

Rozhodíme to i na merateľskosť
mocniny: keď máme, že $n^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

pre $\forall p \in \mathbb{N}$. Totiž platí
i pre $\forall p \in \mathbb{R}_+$!

Napr. $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

$$\sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\sqrt[n^3]{n} = n^{\frac{3}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Príklady - pokračovanie:

$$\textcircled{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n^3]{n^3}}{n+1} \stackrel{\text{F.1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{n(1+\frac{1}{n})} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{1+0} = +\infty$$

Všimněte si: st. p. = $\frac{3}{2}$
st. q. = 1

$$\frac{3}{2} > 1, \lim = +\infty$$

Tj: porovnání stupně funkce
i pro neobecnější stupně

$$\textcircled{7} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - 3n + 4}}{n + 2} =$$

Upozornění:

$$\frac{\sqrt{9n^2 - 3n + 4}}{\sqrt{9n^2 - 3n + 4}} \neq \frac{\sqrt{9n^2 - 3n + 4}}{\sqrt{3n} + \sqrt{4}}$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\text{ale } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Správný postup: vytyčujeme spod
odmocninu:

$$\begin{aligned} & \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(9 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} \cdot \sqrt{9 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}}{n \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{9}}{n \cdot 1} = 3 \end{aligned}$$

Víme pro geometrickou posl. q^n platí:

$$q > 1 \Rightarrow q^n \rightarrow +\infty$$

$$q = 1 \Rightarrow q^n = 1^n \rightarrow 1$$

$$q \in (-1, 1) \Rightarrow q^n \rightarrow 0$$

$$q \leq -1 \Rightarrow \lim q^n \text{ neexistuje}$$

$$\textcircled{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^n}{3^{n+1} - 5 \cdot 2^n} = \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \quad \text{není def.}$$

Pozn: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$

Finťák č. 2 (pro a_n = kombinace geom. posloupnosti): vytyčíme čteny s nejvyšším základem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^n}{3^{n+1} - 5 \cdot 2^n} \stackrel{\text{F.2}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{2 \cdot 2^n}{3^n} - 1}{3 \cdot \left(3 - 5 \cdot \frac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{2 \cdot 0 - 1}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{-1}{3} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

a máme $\frac{2}{3} \in (-1, 1)$
 $\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$

$$\textcircled{9} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \infty - \infty = \textcircled{*} \quad \text{není def.}$$

Finťák č. 3 (pro posloupnosti typu " $\infty - \infty$ "): zadany výraz rozdělíme podobným výrazem s opačným znaménkem

$$\begin{aligned} \text{Teď: } & \textcircled{*} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(a-b) \cdot (a+b)}{= a^2 - b^2} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty + \infty} = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$$\underline{Pr}: \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Finby č. 1, 2, 3 nepomůžeme

Lze dokázat, že tato limita existuje, je konečná a má hodnotu přibližně 2,71828

je to tzv. ~~Eulerovo~~ Eulerovo číslo, e

(my jsme je potkali!), je iracionální.

Toto je první způsob, jak

číslo e definovat: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Dále, pro $\forall x \in \mathbb{R}$ má posloupnost $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

konečnou limitu a tu označíme e^x .

To je první definice exponenciály e^x .

Ekonomická interpretace čísla e :

Pr: úrok z vkladu 100% p.a.

$$Tj: 1Kč \rightarrow 1+1 = 2Kč$$

$$\text{"} \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$$

Toto platí při časovém kroku
určení = 1 rok. Změníme

tento krok na $\frac{1}{2}$ roku:

$$1Kč \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1Kč = 1,50Kč$$

za $\frac{1}{2}$ roku

$$\rightarrow \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} \cdot 1Kč = 1,5^2 \cdot 1Kč = 2,25Kč$$

za celý rok

$$\text{Nyní krok} = 1 \text{ den} = \frac{1}{365} \text{ roku}$$

$$1Kč \xrightarrow{\text{za rok}} \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \cdot 1Kč = \underline{\underline{2,718Kč}}$$

$$K_{rok} = \frac{1}{n} \text{ roků} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \text{ Kč}$$

Spojitel vřocení: $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ hodnota na konci roku bude

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \text{ Kč} = \underline{\underline{e \text{ Kč}}}$$

Pro vřrokovu míru $\cdot 100\%$

dostaneme e^x

Nelonečné řady

Def: řada (suma)

$$\text{Konečná} \quad \sum_{n=0}^N a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_N$$

$$\text{nelonečná} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

" $\sum$ součet nelonečné množiny sčítanců"

Pozn: (1) Lze sčítat i od jiného indexu než 0, součet řady se tím ovšem změní (na rozdíl od limity posloupnosti)

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N a_n \right)$$

posloupnost
částečných součtů

(3) Součet nelonečné řady:

a) je konečný ... řada konverguje

b) je $\pm \infty$... řada diverguje do $\pm \infty$

c) neexistuje ... řada diverguje
a nemá součet

Př: geometrická řada

konvergence: $\sum_{n=0}^N q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^N$

Vzorec: $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad (\text{pro } q \neq 1)$

Dk: $(1 - q) \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^N) =$

$$= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^N} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^N} - q^{N+1} =$$

$$= 1 - q^{N+1}, \text{ což jsme přesešli chvilu}$$

velikost: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

Platí: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N q^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty}$

Pro $q = 1$: $\sum 1^n = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$
Pro $q \geq 1$: $\sum q^n = +\infty$
Pro $q \leq -1$: $\sum$ ~~diverguje~~ diverguje

Př: $q = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$
 $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots =$

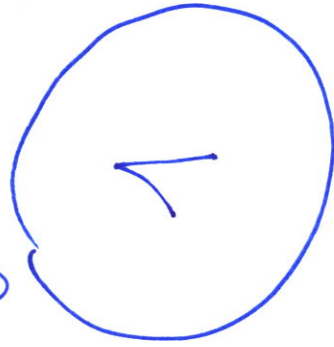
$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

$q \in (-1, 1) \Rightarrow q^N \rightarrow 0$

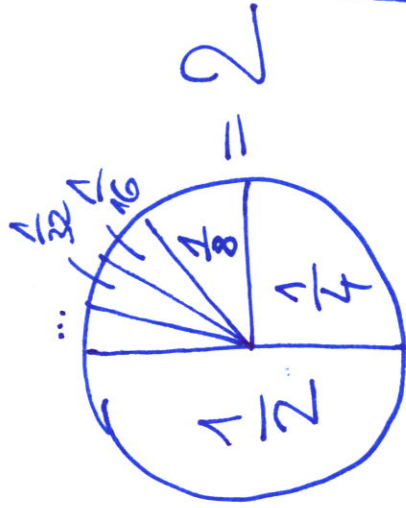
$\Downarrow$ $\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$

$\frac{1}{1 - q}$ pro $q \in (-1, 1)$

Pizny



+



= 2

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

$= e$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$= e^x$

To je druhá definice
čísla e a fce e^x .

Další příklady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty$$

(harmonická řada)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \underline{\underline{\ln 2}}$$

Symbol faktoriál
 $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$
 $0! = 1$